

# 一种基于小波变换模极大值的估计 Lipschitz 指数新方法

连 可, 王厚军, 龙 兵

(电子科技大学自动化工程学院, 四川成都 610054)

**摘 要:** 信号的奇异点和不规则部分往往包含丰富的信息, 其奇异行为通常由 Lipschitz 指数(Lipschitz Exponent, LE) 来刻画. Mallat 和 Hwang 在其经典文献[1]中提出采用小波变换模极大值随对数尺度变化曲线的最大斜率作为 LE 指数的度量. 该方法已被学界广泛采用. 但是, 由于该计算方法只是文献[1]定理 4 不等式等号成立时的特例, 故在噪声的情况下其计算的精确性和鲁棒性往往得不到保证. 本文将 Mallat 的方法进行了改进, 将对数坐标系中在小波变换尺度范围内满足文献[1]定理 4 的直线与小波变换模极大值(Wavelet Transform Modulus Maxima, WTMM) 曲线间的面积作为估算 LE 的目标函数. 在此基础上研究了 LE 的先验知识, 并给出了适于工程计算的估计算法. 最后进行了对比仿真实验. 实验结果证明本文的方法具有更高的精确性和鲁棒性.

**关键词:** Lipschitz 指数; 小波变换; 奇异性; 小波变换模极大值

**中图分类号:** TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2008)01-0106-05

## A Novel Method of Measuring Lipschitz Exponent Based on Wavelet Transform Modulus Maxima

LIAN Ke, WANG Hour jun, LONG Bing

(Department of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

**Abstract:** Singularities and irregular structures typically characterize the content of signals. The Lipschitz Exponent (LE) is the most popular measure of the singularity behavior of a signal. Most of the existing methods of measuring LE using wavelet transform are derived from the previous work of Mallat and Hwang, which equals LE to the maximum slope of straight lines that remain above the wavelet transform modulus maxima(WTMM) curve in the log-log plot of scale  $s$  versus WTMM. However this method is not always robust and precise especially in noise environment, because it is only the particular case of the inequation (25) in [1]. In this paper we adopt a new area based objective function. Based on it, we choice the slope of the line, which minimize the objective function, as the value of LE from all the lines satisfying the inequation (25) in [1]. The results of experiment demonstrate that this method is more precise and robust.

**Key words:** lipschitz exponent; wavelet transform; singularity; wavelet transform modulus maxima

### 1 引言

由于信号的奇异部分通常包含了信号携带的绝大多数重要信息, 信号奇异性分析近年来已成为许多领域研究的热点<sup>[2, 3, 5, 6, 8]</sup>. 在数学上, 奇异性通常由 Lipschitz 指数(Lipschitz Exponent, LE) 度量, 它是一个刻画信号不规则程度的实数. 文献[1]给出了其严格的数学定义.

估计信号  $f(x)$  Lipschitz 指数的传统方法是通过检测其傅立叶变换  $\hat{f}(\omega)$  的对称衰减获得. 但是由于傅立叶变换是一种整体变换, 该方法只能提供信号不规则程度的整体描述, 不能刻画信号的局部奇异性. 为了克服傅立叶分析的这一缺陷, 随着上世纪 90 年代小波热的兴起, 越来越多的学者将小波分析作为数学工具研究信号的局部奇异性.

1992 年, Mallat 和 Hwang 在文献[1]中证明了通过在时-频域内的合理分解, 小波变换能够很好地刻画信号的局部奇异特性, 并且进一步提出, 可以通过跟踪小波变换模极大值(Wavelet Transform Modules Maxima, WTMM) 在影响锥(Cone Of Influence, COI) 内的跨尺度变化估计信号奇异点的 LE. 根据文献[1]定理 4, WTMM 在对数坐标系中随尺度变化曲线的最大斜率可作为 LE 的估计值. 该方法被此后的许多研究者采用, 并得到了一些很好的结果<sup>[7, 10, 15]</sup>. 但是, Mallat 的方法仅仅是文献[1]定理 4 中等号成立时的特例, 一些研究者已经注意到该方法在一些情况下并不总是有效<sup>[11, 13]</sup>. 例如, 当由于信号奇异点的 COI 重叠或者信号被噪声污染导致 WTMM 曲线在尺度空间产生波动时, 该方法的精确性和鲁棒性将会大大降低.

Tu 在文献[4]中对 Mallat 的工作进行了推广和改进, 提出采用最小中值平方衰减(least median of squares regression)作为目标函数估算 LE 的方法, 使得估算的精度和鲁棒性得到了大幅的提高. 但该方法需要搜索双变量目标函数极值, 由于没有提供目标函数变量的任何先验知识, 搜索的结果高度依赖于变量初始值的选择. 对此, 文献[4]并没有做深入研究. 文献[14, 12]采用了 WTMM 曲线的渐进衰减斜率估算 LE. 理论上讲, 当小波尺度可以无限趋近零的时候, 这是 LE 的最佳估计. 但实际上小波变换尺度不会无限趋近零, 对于二进小波来讲, 其尺度最小为 1. 因此该方法实际上是在尺度大于等于最小尺度情况下的近似估计. 此外, 该方法在计算中只采用了 WTMM 曲线渐进衰减处的几个点参与运算, 其鲁棒性往往得不到保证.

本文提出了一种新的基于 WTMM 的 LE 估计方法. 首先提出将对数坐标系中, 在小波变换尺度范围内满足文献[1]定理 4 的直线与 WTMM 曲线间的面积作为估算 LE 的目标函数. 在此基础之上研究了 LE 的先验知识, 并给出了搜索算法. 实验结果证明, 与上述三种方法相比本文提出的方法具有更好的精确性和鲁棒性.

## 2 基本理论

为了使本文具有自包含性, 本节对有关的基本理论和概念进行一个简单的回顾.

### 2.1 小波变换

小波变换的理论首先由 Morlet 和 Grossman 提出<sup>[16]</sup>. 当  $\Psi$  函数满足:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = 0 \quad (1)$$

$\Psi$  可称为小波函数  $f \in L^2(R)$ . 函数的小波变换定义为:

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi^* \left( \frac{t-u}{s} \right) dt \quad (2)$$

其中,  $\Psi^*$  是  $\Psi$  复共轭.

称小波  $\Psi(x)$  具有阶消失矩, 当且仅当对于所有正整数  $k < n$ , 满足:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \Psi(x) dx = 0 \quad (3)$$

消失矩对于小波奇异性分析是一个很重要的概念, 因为它提供了小波函数分析信号奇异性能力的上界. 通常采用高斯函数的  $n$  阶导数作为小波函数:

$$\Psi_n(x) = -\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \quad (4)$$

该函数具有  $n$  阶消失矩.

### 2.2 小波奇异性检测

LE 是反映信号奇异性程度的一个指标. Mallat 和 Hwang 在文献[1]中证明可以利用信号的小波变换模极

大值估算 LE. 这里介绍几个与之相关的概念.

定义

- $(u_0, s_0)$  称为局部极值点, 当  $(\partial Wf(u, s_0))/\partial u$  在  $u = u_0$  具有过零点时.

- $(u_0, s_0)$  称为模极大值点, 当  $|Wf(u, s_0)| < |Wf(u_0, s_0)|$ ,  $u$  属于  $u_0$  的左邻域(或右邻域), 且  $|Wf(u, s_0)| < |Wf(u_0, s_0)|$ ,  $u$  属于  $u_0$  右邻域(或左邻域).

- 在尺度空间平面  $(u, s)$  内, 连接模极大值点的曲线称为模极大值线.

假设小波函数  $\Psi$  是一光滑函数的  $n$  阶导数, 紧支撑,  $n$  阶连续可导. 文献[1]定理 4 可重写为:

定理 1  $f \in L^1[a, b]$ , 其小波变换严格定义于  $[a, b]$ , 设  $u_0 \in [a, b]$ . 假设存在尺  $s_0 > 0$  度和常数  $C$ , 使对  $\forall u \in [a, b], s < s_0 |Wf(u, s)|$  的所有模极大值点都位于由

$$|u - u_0| \leq Cs \quad (5)$$

定义的影响锥内, 则对  $\forall u_1 \in [a, b], u_1 \neq u_0, f$  在  $u_1$  邻域内是一致 Lipschitz  $n$ . 令  $\alpha$  为小于  $n$  的非整数, 函数  $f$  在  $u_0$  点的 Lipschitz 指数为  $\alpha$ , 当且仅当存在一个常数  $A$ , 使影响锥内的所有模极大值点  $(u, s)$  都满足:

$$|Wf(u, s)| \leq As^\alpha \quad (6)$$

定理 1 提供了利用 WTMM 估计 Lipschitz 指数  $\alpha$  的数学基础, 文献[1]给出了其详细证明.

## 3 基于 WTMM 的 Lipschitz 指数估计方法

本节先分析目前常用的基于 WTMM 的 LE 估计方法, 然后提出本文的改进方法.

### 3.1 常用的 LE 估计算法

为了便于计算, 式(6)可改写为:

$$\log_2 |Wf(u, s)| \leq \log_2(A) + \alpha \log_2(s) \quad (7)$$

在对数坐标系中, 上式左右两边分别可以看作以  $\log_2 s$  为自变量的曲线和直线. 根据式(7), 文献[1]将  $u_0$  处的 LE 等于收敛于  $u_0$  的曲线  $\log_2 |Wf(u, s)|$  的最大斜率  $\alpha$ . 但事实上, 式(7)仅仅表明曲线  $\log_2 |Wf(u, s)|$  位于直线  $\log_2(A) + \alpha \log_2(s)$  的下方. 显然, 文献[1]的方法只是式(7)取等时的特例<sup>[13]</sup>. 当  $\log_2 |Wf(u, s)|$  曲线由于信号奇异点的 COI 重叠或噪声干扰影响产生波动时, 其估计的精度和鲁棒性都会大大下降.

此外, 文献[4]采用最小中值平方衰减(least median of squares regression)函数:

$$f(A, \alpha) = \text{median}_s((\log_2 |Wf(u, s)| - \log_2(A) - \alpha \log_2(s))^2)$$

作为目标函数 将满足  $\min f(A, \alpha)$  的  $\alpha$  作为 LE 的估计; 文献[14]和[12]采用近似估计:

$$\alpha \approx \log_2 M_{j+1} - \log_2 M_j \quad (8)$$

其中,  $M_j$  和  $M_{j+1}$  分别是在尺度  $s = 2^j$  足够小时,  $\log_2 |Wf(u, s)|$  曲线上相邻的两个点.

为了说明以上三种方法的不足, 我们构造了如图 1 (a) 所示的函数  $y(x)$ . 该函数从左到右共有 4 个奇异点, 对应的横坐标分别为 60、210、275 和 381, 其 Lipschitz 指数分别为 0.1、2、-1 和 0.4. 函数的小波变换  $W_y(u, s)$  如图 1 (b) 所示, 采用了高斯函数的二阶导数  $\psi$  作为小波母函数. 其 WTMM 线如图 1 (c) 所示. 图 1 (d) 显示了沿一条左收敛于  $x = 60$  的 WTMM 线的  $\log_2 |W_y(u, s)|$  变化曲线, 图中横坐标为  $\log_2 s$ .

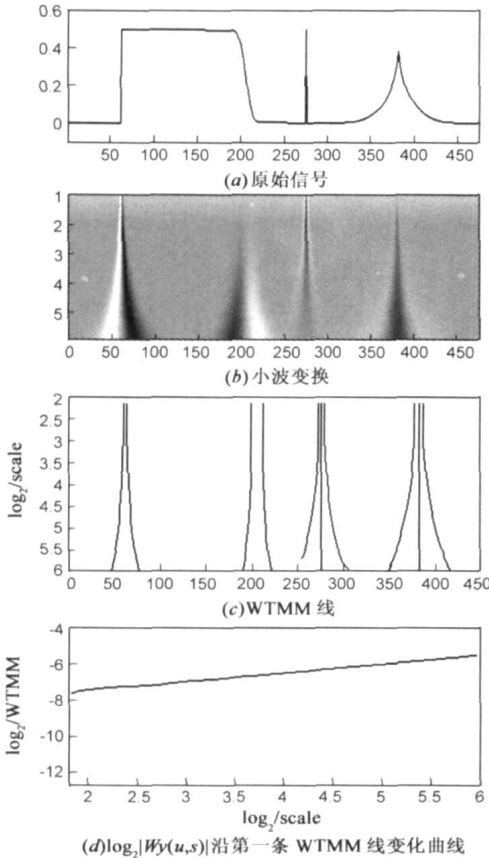


图 1 原始信号及其小波变换

用文献[1]和[14]的方法, 估计  $x = 60$  处的 LE 分别为 0.6912 和 0.1967, 两者均大大偏离了真实值  $\alpha = 0$ . 误差产生的原因是当  $\log_2 s < 3.5$  时, 曲线  $\log_2 |W_y(u, s)|$  出现了轻微的波动, 如图 1 (d) 所示; 改用文献[4]的方法, 在初始值选择  $A = 2, \alpha = 1$  时可以得到一个非常好的估计结果  $\alpha = -0.0178$ . 但如果初始值选择  $A = 1, \alpha = 2$ , 估计结果就变得非常糟糕  $\alpha = -1.7194$ . 而对初始值的选择, 文献[4]并未做深入研究.

### 3.2 改进方法

不失一般性, 假设原始信号为一时限信号, 其小波变换尺度最小为  $s_{\text{small}}$ , 最大为  $s_{\text{max}}$ . 显然,  $s_{\text{small}} < s < s_{\text{max}}$ . 实际上, 式(7)给出了  $\log_2 |Wf(u, s)|$  曲线变化的上限,

其与  $\log_2(A) + \alpha \log_2(s)$  之间的误差可以用最小二乘法估计:

$$\min_{A, \alpha} \left( \sum_s (\log_2 |Wf(u, s)| - \log_2(A) - \alpha \log_2(s))^2 \right) \quad (9)$$

式(9)等价于:

$$\min_{A, \alpha} \left( \sum_s |\log_2 |Wf(u, s)| - \log_2(A) - \alpha \log_2(s)| \right) \quad (10)$$

令  $\Delta \log_2 s = |\log_2(s_j) - \log_2(s_{j+1})|$  表示相邻二尺度的步长, 为一常数. 于是式(10)等价于:

$$\min_{A, \alpha} \left( \sum_s \Delta \log_2(s) \cdot |\log_2 |Wf(u, s)| - \log_2(A) - \alpha \log_2(s)| \right)$$

令

$$f(A, \alpha) = \left( \sum_s \Delta \log_2(s) \cdot |\log_2 |Wf(u, s)| - \log_2(A) - \alpha \log_2(s)| \right) \quad (11)$$

当  $\Delta \log_2(s)$  足够小时, 上式即近似等于在区间  $\log_2(s_{\text{small}}) < \log_2(s) < \log_2(s_{\text{max}})$  内, 曲线  $\log_2 |Wf(u, s)|$  与直线  $\log_2(A) + \alpha \log_2(s)$  所夹的面积  $S_{ABC'D'}$ , 如图 2 所示:

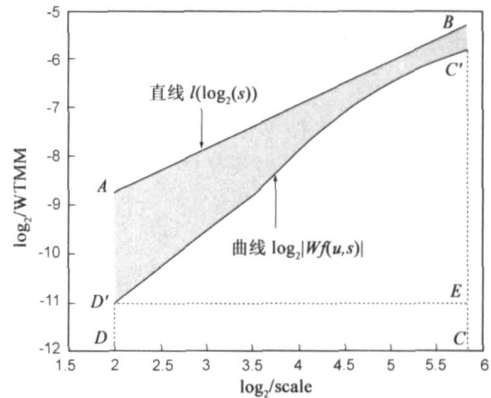


图 2  $\log_2 |Wf(u, s)|$  与  $\log_2(A) + \alpha \log_2(s)$  所夹面积示意图

对图 2 进行分析,  $S_{ABC'D'} = S_{ABED'} - S_{C'ED'}$ . 由于  $S_{C'ED'}$  固定, 最小化  $S_{ABC'D'}$  等价于最小化梯形面积  $S_{ABED'}$ . 又由于长度  $|CD|$  固定, 问题可进一步等价于最小化长度  $|AD'| + |BE|$ . 于是, 式(11)可简化为:

$$f(A, \alpha) = |\log_2(A) + \alpha \log_2(s_{\text{small}}) - \log_2 |Wf(u, s_{\text{small}})|| + |\log_2(A) + \alpha \log_2(s_{\text{max}}) - \log_2 |Wf(u, s_{\text{small}})|| \quad (12)$$

至此, LE 的估计问题可以转化为如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min f(A, \alpha) \\ \text{s. t. } \log_2 |Wf(u, s)| \leq \log_2(A) + \alpha \log_2(s) \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\log_2(A)$  和  $\alpha$  可分别看作直线  $l(\log_2(s)) = \log_2(A) + \alpha \log_2(s)$  的截距和斜率. 这是一个双变量函数的极值问题. 为了简化求解过程, 先证明如下命题:

**命题 1** 设  $l(x)$  和  $g(x)$  分别为平面内的直线段和光滑曲线段.  $l(x) \geq g(x), x \in [a, b]$ .  $S$  为二者在区间  $[a, b]$  内所夹面积.  $S = S_{\text{min}}$  当: ①  $l(x)$  和  $g(x)$  之间至少存在一个公共点; ②  $l(x)$  为  $g(x)$  的切线或连接其两个端点的连线.

证明 先证明条件 ① 采用反证法, 假设当  $S =$

$S_{\min}$  时,  $l(x)$  和  $g(x)$  之间不存在公共点. 于是可以向下平行移动  $l(x)$  直到与  $g(x)$  恰好有一个公共点, 记此时在区间  $[a, b]$  内二者之间的面积为  $S'_{\min}$ . 显然,  $S'_{\min} < S_{\min}$ . 这与假设矛盾, 于是条件 ① 得证.

为了证明条件 ② 先引入引理 1:

**引理 1** 设  $l(x)$  和  $g(x)$  分别为平面内的直线段和光滑曲线段,  $l(x) \geq g(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . 如果在区间  $(a, b)$  内二者之间存在公共点, 则  $l(x)$  必为过公共点处  $g(x)$  的切线.

引理 1 是显而易见的, 这里忽略其证明. 条件 ② 的证明可以分为如下 3 种情况:

**情况 1:**  $l(x)$  和  $g(x)$  之间只有 1 个公共点. 这种情况下公共点不可能是曲线段  $g(x)$  的端点. 因为如果为端点, 则直线  $l(x)$  可以绕该点旋转, 直至与曲线  $g(x)$  在另一点相切或连接另一端点, 此时  $l(x)$  和  $g(x)$  之间存在至少两个公共点, 与假设矛盾. 因此, 公共点必为  $(x_0, g(x_0))$ ,  $x_0 \in (a, b)$ . 根据引理 1,  $l(x)$  是在  $(x_0, g(x_0))$  处  $g(x)$  的切线.

**情况 2:**  $l(x)$  和  $g(x)$  之间仅有 2 个公共点. 这种情况下, 公共点可能是 (a) 均在区间  $(a, b)$  内; (b) 均为曲线段  $g(x)$  的端点; (c) 一个点在区间  $(a, b)$  内, 一个是曲线段  $g(x)$  的端点. 在 (a) 和 (c) 的情况下, 根据引理 1,  $l(x)$  是过公共点处  $g(x)$  的切线. 在 (b) 的情况下,  $l(x)$  是  $g(x)$  端点的连线.

**情况 3:**  $l(x)$  和  $g(x)$  之间存在 2 个以上的公共点. 这种情况下, 必存在至少一个公共点在区间  $(a, b)$  内. 根据引理 1,  $l(x)$  是过公共点处  $g(x)$  的切线.

综述, 条件 ② 得证. 证毕.

命题 1 给出了当  $\min f(A, \alpha)$  时  $l(\log_2(s))$  满足的必要条件. 据此, 我们给出求解式 (13) 的如下算法.

**Step1:** 计算连接  $(\log_2(s_{\text{small}}), \log_2 |Wf(u, s_{\text{small}})|)$  与  $(\log_2(s_{\text{max}}), \log_2 |Wf(u, s_{\text{max}})|)$  的直线  $l(\log_2(s))$ . 如果  $l(\log_2(s)) \geq \log_2 |Wf(u, s)|$ , 返回  $l(\log_2(s))$  的斜率值  $\alpha$ , 转 Step7.

**Step2:** 初始化  $s = s_{\text{max}}$ ,  $f(A, \alpha) = C$ , 其中  $C$  为一足够大正常数.

**Step3:** 计算点  $(\log_2(s), \log_2 |Wf(u, s)|)$  处  $\log_2 |Wf(u, s)|$  的切线  $l(\log_2(s))$ . 如果  $l(\log_2(s)) \geq \log_2 |Wf(u, s)|$ , 转 Step4. 否则转 Step6.

**Step4:** 计算式 (12) 记其结果为  $f$ . 如果  $f < f(A, \alpha)$ , 更新  $f(A, \alpha) = f$ ,  $LE = \alpha$ .

**Step5:** 如果  $s = s_{\text{min}}$  转 Step7. 否则转 Step6.

**Step6:**  $s = s - \Delta \log_2(s)$ , 转 Step3.

**Step7:** 输出  $LE = \alpha$ .

由于利用了直线  $l(\log_2(s))$  的先验知识, 算法只需

要沿  $\log_2 |Wf(u, s)|$  曲线搜索, 这样就回避了  $A$  和  $\alpha$  的初始值问题.

## 4 实验与分析

### 4.1 实验步骤

我们将图 1 所示的原始信号注入信噪比 (SNR) 分别为 40dB、30dB、20dB、10dB 的高斯白噪声. 图 3 显示了信号被噪声逐步淹没的过程.

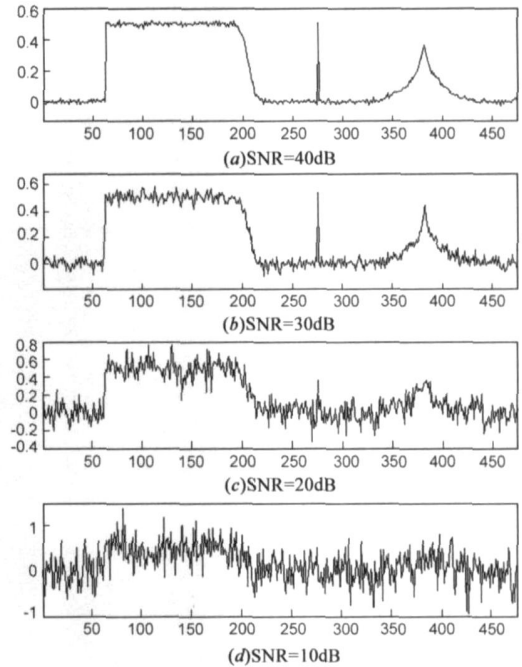


图 3 原始信号中注入高斯白噪声

在不同噪声环境下, 我们首先利用文献 [1] 的算法产生 WTMM 线, 然后分别用文献 [1, 4, 14] 和本文的方法估计信号在 60、210、275 和 381 处的 LE 值. 实验中, 用高斯函数的二阶导数为小波母函数. 取  $s_{\text{small}} = 2$ ,  $s_{\text{max}} = 64$ ,  $\Delta \log_2 s = 0.0326$ . 对于文献 [4] 的方法, 初始值取  $A = 2$ ,  $\alpha = 1$ . 我们对每种方法进行了 16 次独立实验, 并记录其均值和方差. 实验结果如图 4 所示.

### 4.2 结果分析

(1) 从图 4 可见, 文献 [1] 和 [14] 的方法所得实验结果的方差随 SNR 的减小而变大, 证明在噪声环境下这两种方法的结果不稳定, 这和前文的分析相吻合. 文献 [4] 和本文的方法在各种噪声环境下对 4 类奇异点估计方差均很小, 说明两种方法具有更高的鲁棒性.

(2) 随着 SNR 的减小, 信号变得越来越不光滑, 信号的 LE 将变得越来越小. 本文的方法在图 4(a)、(b)、(d) 中很好地反映了这一趋势. 而文献 [1] 方法的实验结果却正好与此相反. 产生这一现象的原因是随着 SNR 的减小, WTMM 线的波动越来越剧烈, 其切线的最大斜率也将变大. 虽然文献 [4] 和 [14] 方法的实验结果也较好地反映了这一趋势, 但文献 [4] 的结果是在特定

的初始值条件下得到的, 文献[14]的结果在 SNR 较小时方差太大.

(3) 对于图 4(c), 除文献[1]的方法外, 其他 3 种方法实验结果的均值均变化不大. 这是因为高斯白噪声几乎处处奇异, 对于冲激奇异点影响不大. 本文和文献[4]方法的结果都很好地反映的这种现象, 文献[14]的结果在噪声环境下波动很大.

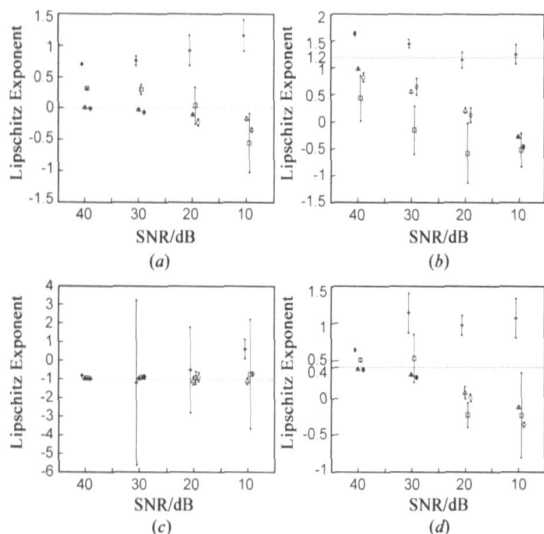


图 4 文献 [1,4,14] 和本文方法在不同噪声环境下对不同奇异点 LE 估计效果比较, 分别用 \*,  $\diamond$ ,  $\square$ ,  $\triangle$  表示. (a)~(d) 分别对应原始信号中从左到右的 4 个奇异点, 图中水平虚线表示其在无噪声环境下的 LE 值

## 5 结论

本文对文献[1]估计 LE 方法进行了改进. 提出将对数坐标系中在小波变换尺度范围内满足文献[1]定理 4 的直线与 WTMM 曲线间的面积作为估算 LE 的目标函数. 研究了使该目标函数最小的直线的所有情况. 在此基础上给出了适于工程应用的估计算法, 并进行了对比仿真实验. 本文的方法不依赖于目标函数的初始值的选择, 并且由于利用了 WTMM 曲线的整体信息, 所以具有更高的鲁棒性和精确性. 实验结果验证了上述结论.

## 参考文献:

- [1] S Mallat, W L Hwang. Singularity detection and processing with wavelets [J]. IEEE Transaction on Inf Theory, 1992, 38 (2): 617– 643.
- [2] A Arneodo, E Bacry, J F Muzy. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets [J]. Phys A, 1995, 213 (1– 2): 232– 275.
- [3] H Asada, M Brady. The curvature primal sketch [J]. IEEE Transaction on Pattern Anal Mach Intell, 1986, 8(1): 2– 14.
- [4] C L Tu, W L Hwang. Analysis of singularities from modulus maxima of complex wavelets [J]. IEEE Transaction on Inf

Theory, 2005, 51(3): 1049– 1062.

- [5] S Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing [M]. San Diego, CA: Academic, 1999. 163– 219.
- [6] S Mallat, S Zhong. Characterization of signals from multiscale edges [J]. IEEE Transaction on Pattern Anal Mach Intell, 1992, 14(7): 710– 732.
- [7] J Zhang, C X Zheng. Extracting evoked potentials with the singularity detection technique [J]. IEEE Engineering in Medicine and Biology, 1997, 16(5): 155– 161.
- [8] E Chassande Motin, P Flandrin. On the time frequency detection of chirps [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1999, 6(2): 252– 281.
- [9] H B Nugraha, A Z R Langi. A procedure for singularity measurement using wavelet [A]. In Proceeding APCCAS '02 [C]. Bali, Indonesia: IEEE Press, 2002. 407– 410.
- [10] K Berkner, R Wells. A new hierarchical scheme for approximating the continuous wavelet transform with applications to edge detection [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1999, 6(8): 109– 195.
- [11] T C Hsung, D P Lun, W C Siu. Denoising by singularity detection [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1999, 47(11): 3139– 3144.
- [12] J Zhong, R Ning. Image denoising based on wavelets and multifractals for singularity detection [J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2002, 14(10): 1435– 1447.
- [13] 陈祥训. 对几个小波基本概念的理解 [J]. 电力系统自动化, 2004, 28(1): 1– 6. X X Cheng. Some basic concepts of wavelets [J]. Automation of Electric Power Systems, 2004, 28(1): 1– 6. (in Chinese)
- [14] E W Abel, H Y Meng, A Forster, D Holder. Singularity characteristics of needle EMG IP signals [J]. IEEE Transaction on Biomed Engineering, 2006, 53(2): 319– 225.
- [15] A Khamene, S Negahdaripour. A new method for the extraction of fetal ECG from the composite abdominal signal [J]. IEEE Transaction on Biomed Engineering, 2000, 47(4): 507– 516.
- [16] A Grossmann, d J Morlet. Decomposition of hardy functions into square InteGrade wavelets of constant shape [J]. SIAM J Math Anal, 1984, 15(4): 723– 736.

## 作者简介:



连可男, 1978年2月出生于重庆璧山, 2000年、2003年分别于空军工程大学获战术导弹控制与测试工程专业学士学位和机械电子工程专业硕士学位; 2003年至2004年就职于空地空导弹某部; 2005年进入电子科技大学自动化工程学院, 现为检测技术与自动化装置专业博士研究生. 主要从事信号检测与估计及智能优化算法方面的研究. E-mail: lian\_k@163.com